1 Union et intersection

Figure 1: Intersection entre deux évenement A et B, notée $A \cap B$ (A inter B)

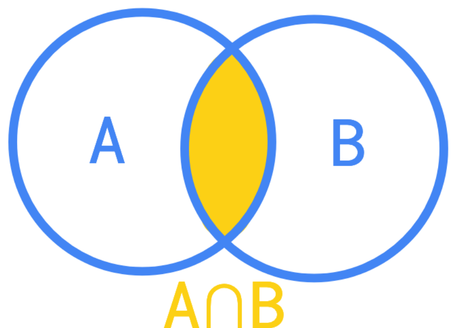
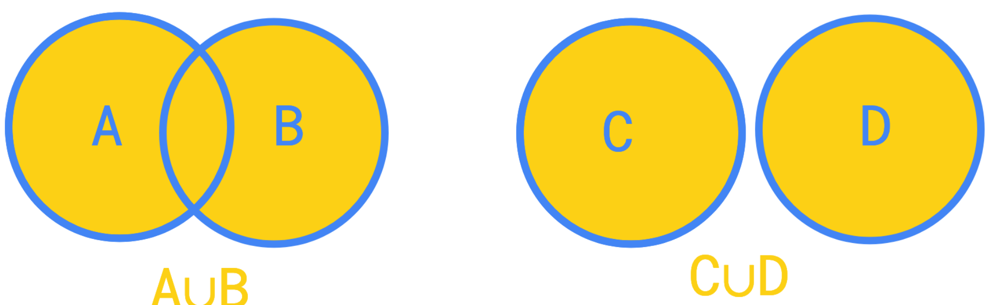


Figure 2: Union entre deux évenement A et B, et entre deux autres évenements C et D, notée $A \cup B$ (A union B), resp. $C \cup D$ (C union D)



2 Propriétés

$0 \leq P(A) \leq 1$
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ si A et B sont indépendants
$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

3 Calcul d'une probabilité

3.1 Formules

Pour calculer une probabilité, on calcule le nombre de combinaisons possibles de l'évenement recherché $Card(A)$, qu'on divise par le nombre total de combinaisons possibles $Card(\Omega)$: $\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$. On appelle ce nombre de combinaisons "cardinal".

Pour calculer un cardinal, il existe 3 formules à appliquer selon la situation :

Situation	*Formule*	*Calcul*
Simultané	C_n^p	$\frac{n!}{p!(n-p)!}$
Successif sans remise	A_n^p	$p * p - 1 * p - 2 * ... * (p - n) + 1$
Successif avec remise	n^p	$n * n * n...$

Table 1: Calcul d'un cardinal

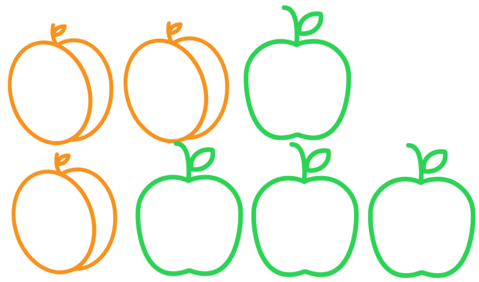
$$C_3^7 = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7*6*5*4!}{3!*4!} = \frac{35*3*2}{3*2} = 35$$
$$A_3^7 = 7 * 6 * 5 = 7 * 30 = 210$$
$$3^7 = 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 = 2187$$

Table 2: Exemples de calculs utilisant ces formules

3.2 Exemples

Nous avons 3 abricots et 4 pommes.

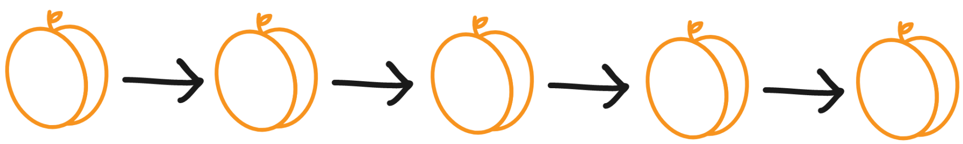
Figure 3: Univers composé de 3 abricots orange et 4 pommes vertes



3.2.1 Tirage successif avec remise

Quelle est la probabilité de tirer successivement 5 abricots, en les remettant en place après chaque tirage ?

Figure 4: Évenement recherché, 5 abricots d'affilée



Nous tirons 5 fois, et 3 des éléments sont des abricots. Le cardinal de notre évenement est $Card(A) = 3^5 = 243$

Nous avons un total de 8 éléments sur chacun des tirages. Calculons le cardinal : $Card(\Omega) = 7^5 = 16807$

Nous avons ainsi $\frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{243}{16807} \approx 1,45\%$ de tirer 5 abricots d'affilée.

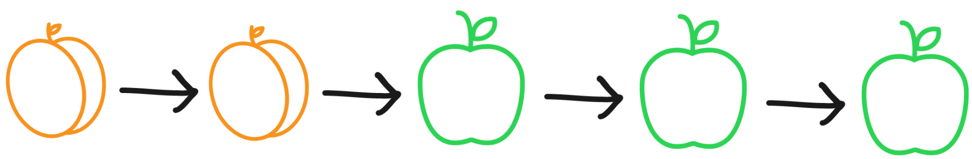
Même calcul, mais cette fois pour tirer 3 abricots suivis de 2 pommes : $\frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{3^3 * 4^2}{7^5} = \frac{432}{16807} \approx 2,57\%$

Cette notation peut être comprise de la manière suivante : nous avons $\frac{3}{7}$ de tirer un abricot, puis à nouveau $\frac{3}{7}$ deux autres fois. Nous avons ensuite $\frac{4}{7}$ de tirer une pomme, deux fois de suite. Nous pouvons ainsi écrire notre probabilité sous la forme $\frac{3}{7} * \frac{3}{7} * \frac{3}{7} * \frac{4}{7} * \frac{4}{7}$, qui correspondent bien à notre notation $\frac{3^3 * 4^2}{7^5}$.

3.2.2 Tirage successif sans remise

Quelle est la probabilité de tirer successivement 1 abricot puis 1 pomme, sans les remettre en place après chaque tirage ?

Figure 5: Évenement recherché, 1 abricot puis 1 pomme



Commençons par le tirage des abricots. Nous avons 3 abricots disponibles, et nous voulons en tirer deux d'affilée. Nous avons 7 fruits au début du tirage. $\frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{A^3_2}{A^7_2} = \frac{\cancel{3*2}}{7*\cancel{6}} = \frac{1}{7} \approx 14\%$. Nous avons ainsi environ 14% de probabilité de tirer deux abricots de suite.

Continuons avec les pommes. Notre univers Ω n'est désormais plus constitué que d'1 abricot et 4 pommes, soit un total de 5 fruits. Nous voulons tirer 3 des 4 pommes, d'affilée. $\frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{A^4_3}{A^5_3} = \frac{\cancel{4}*\cancel{3}*2}{5*\cancel{4}*\cancel{3}} = \frac{2}{5} = 40\%$ de probabilité de tirer 3 pommes d'affilée, sur les 5 fruits disponibles.

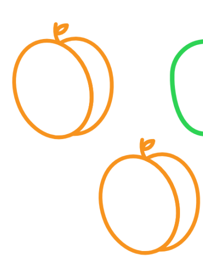
En mettant bout à bout nos deux probabilités successives, nous avons $\frac{1}{7} * \frac{2}{5} = \frac{2}{35} \approx 5,71\%$ de probabilité que notre évenement complet, le tirage de 2 abricots puis de 3 pommes, se produise.

Nous pouvons reproduire ce calcul en calculant évenement après évenement : $\frac{3}{7} * \frac{2}{6} * \frac{4}{5} * \frac{3}{4} * \frac{2}{3}$, ce qui correspond bien à notre calcul.

3.2.3 Tirage simultané

Quelle est la probabilité de tirer simultanément 2 abricots et 1 pomme ?

Figure 6: Évenement recherché, 2 abricots et 1 pomme



Nous devons trouver 2 abricots sur 3 disponibles $Card(A) = C_3^2$ et 1 pomme sur 4 disponibles $Card(A) = C_1^4$.
Calculons le cardinal de notre évenement :
$Card(A).Card(B) = C_3^2.C_1^4 = \frac{\cancel{3!}}{2!*1!} * \frac{4!}{1!*\cancel{3!}} = \frac{4*3*\cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 12$

Le cardinal de l'univers, soit toutes les possibilités, correspond à 3 fruits tirés sur 7 disponibles :
$Card(\Omega) = C_7^3 = \frac{7!}{3!*4!} = \frac{7*6*5*\cancel{4!}}{3*2*\cancel{4!}} = \frac{7*\cancel{6}*5}{\cancel{6}} = 35$

Nous avons donc $\frac{Card(A).Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{12}{35} \approx 0.34$ environ 34% de chances que cet évenement se produise.